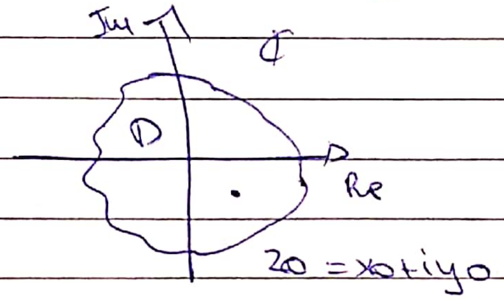
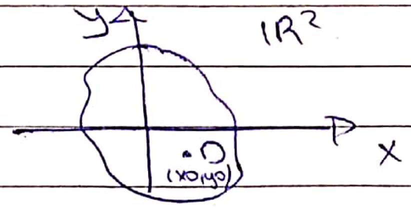
27/3/21

Θέλουμε να δούμε ποια η σχέση της μιγαδικής διαφορισιμότητας μιας $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, στο $z_0 \in D$ με την διαφορισιμότητα του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου στον $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}: D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό, στο $(x_0, y_0) \in D$

όπου $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x+iy) \\ \operatorname{Im} f(x+iy) \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ με $z = x+iy \in D \subset \mathbb{C} \overset{\text{αντιστοιχία}}{\Leftrightarrow} (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ και $z_0 = x_0 + iy_0 \in D \subset \mathbb{C} \overset{\text{αντιστοιχία}}{\Leftrightarrow} (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$





• Έστω η f μιγαδικά διαφ/μη στο $z_0 \overset{\text{Λήμμα}}{\Leftrightarrow} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0$ (1)

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$ το οποίο είναι μοναδικό και $\lambda = f'(z_0)$

Από την άλλη το $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ είναι διαφ/μο στο $(x_0, y_0) \Leftrightarrow$

$$\overset{\text{Απειρ.}}{\Leftrightarrow} \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0) - D\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = \bar{0}$$

όπου $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ είναι μοναδικό και $D = D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0, y_0) =$

$$= \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Πριν προχωρήσουμε πρέπει να εκφράσουμε το $\lambda(z-z_0)$ σε αλγεβρική μορφή. Γενικά: μιγαδικές συναρτήσεις της μορφής $z \mapsto \lambda z$, $z \in \mathbb{C}$, με $\lambda \in \mathbb{C}$ τις ονομάζουμε $\mathbb{C}$-γραμμικές και αντιστοιχούν στα διανυσματικά πεδία του $\mathbb{R}^2$:

$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} Re(\lambda z) \\ Im(\lambda z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, όπου αν $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ με $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ και $z = x+iy$, τότε:

$\lambda z = (\lambda_1 + i\lambda_2)(x+iy) = \lambda_1 x - \lambda_2 y + i(\lambda_2 x + \lambda_1 y) = Re(\lambda z) + i Im(\lambda z)$,

δηλ. στο διανυσμ. πεδίο $(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 x - \lambda_2 y \\ \lambda_2 x + \lambda_1 y \end{pmatrix} =$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{=:\Lambda} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Άρα, σε κάθε $\mathbb{C}$-γραμμική μιγαδική συνάρτηση $f(z) = \lambda z$, $z \in \mathbb{C}$, με $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ αντιστοιχεί (1-1 και επί) το διανυσμ. πεδίο στον $\mathbb{R}^2$ $\Lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

δηλ. το γραμμικό διαν. πεδίο στο $\mathbb{R}^2$ $\Lambda: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

[το οποίο είναι ειδική περίπτωση γραμμικού διαν. πεδίου στον $\mathbb{R}^2$ της γενικής μορφής $D = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$]

Με τα παραπάνω το (1): $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z-z_0)}{z-z_0} = 0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - \lambda(z-z_0)|}{|z-z_0|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z-z_0)}{|z-z_0|} \right| = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z-z_0)}{|z-z_0|} = 0 \Leftrightarrow$

βλ. όρια

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x,y) - \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x_0,y_0) - \Lambda\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}}{\|(x-x_0,\ y-y_0)\|} = \bar{0}$$

Άρα: 6λ-ΑΠΕΙΞ, το $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$, είναι διαφορίσιμο

στο $(x_0,y_0) \in D$ με παράγωγο $D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0)\end{pmatrix}$

$= \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ (και αντίστροφα)

Άρα αποδείξαμε το Θεώρημα Cauchy-Riemann:
Η $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, είναι μιγαδικά διαφ/μη στο $z_0 \in D$ με παράγωγο $f'(z_0) = \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ το αντίστοιχο διαν. πεδίο $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^2$ είναι διαφορίσιμο στο

$(x_0,y_0) \in D$ [με $z_0 = x_0 + iy_0$] και ισχύει $D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}(x_0,y_0) =$

$= \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ δηλαδή, αν $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ είναι διαφ. στο (x_0,y_0) και ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0) \end{cases}$$ τότε:

$$f'(x_0+iy_0) = u_x(x_0,y_0) + i\,v_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) - i\,u_y(x_0,y_0) =$$
$$= -i\,(u_y(x_0,y_0) + i\,v_y(x_0,y_0))$$

όπου $f(x_0+iy_0) = u(x_0,y_0) + i\,v(x_0,y_0)$

Θέτοντας $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := u_x(x,y) + i v_x(x,y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := u_y(x,y) + i v_y(x,y)$

έχουμε δηλ. $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$

Scanned with CamScanner

Τώρα καταλαβαίνουμε γιατί η $f(z)=\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$ δεν είναι πουθενά μιγαδικά διαφ/μη.
Το αντίστοιχο διανυσμ. πεδίο είναι το $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

Σ $\Leftrightarrow$ $f(x+iy) = \overline{x+iy} = x-iy = x+i(-y)$ το οποίο έχει παράγωγο $D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, δηλ:

$u_x(x,y) = 1 \neq -1 = v_y(x,y)$, και άρα δεν πληρεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann.

Άρα: $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο x_0+iy_0 $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y)$ διαφ. στο (x_0,y_0) με:

$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$
$v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0)$

Γεννάται το ερώτημα: Έστω ότι $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ διαν. πεδίο στον $\mathbb{R}^2$ είναι διαφ/μο, δηλ. $\exists$ $D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με $D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = D$

• Τι σημαίνει αυτό για την αντίστοιχη μιγαδική συνάρ. $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$?

Για να το καταλάβουμε θα πρέπει να δούμε ποιες μιγαδικές συναρτήσεις αντιστοιχούν σε γραμμικά διανυσμ. πεδία του $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{x+iy}_{=z} \mapsto \underbrace{(\alpha x+\beta y)}_{=u(x,y)} + i\underbrace{(\gamma x+\delta y)}_{=v(x,y)} = f(x+iy)$

όπου $f(x+iy) = (ax+by) + i(\gamma x + \delta y) =$

$$= (a+i\gamma)\underbrace{x}_{\frac{z+\bar{z}}{2}} + (b+i\delta)\underbrace{y}_{\frac{z-\bar{z}}{2i}} = (a+i\gamma)\frac{z+\bar{z}}{2} + (b+i\delta)\frac{z-\bar{z}}{2i} =$$

$$= \left(\frac{a+i\gamma}{2} + \frac{b+i\delta}{2i}\right) z + \left(\frac{a+i\gamma}{2} - \frac{b+i\delta}{2i}\right)\bar{z}$$

$$= \frac{1}{2}(a+i\gamma - ib + \delta) \qquad = \frac{1}{2}(a+i\gamma+ib-\delta)$$

$$= \frac{1}{2}(a+\delta + i(\gamma - b)) \qquad = \frac{1}{2}(a-\delta + i\cdot(b+\gamma))$$

$$= \frac{1}{2}(a+ib) =: \lambda \qquad = \frac{1}{2}(a+ib) =: \mu$$

$$\Rightarrow f(z) = \lambda z + \mu \bar{z}, \ \lambda,\mu \in \mathbb{C}, \ z \in \mathbb{C}$$

Τα παραπάνω ισχύουν και αντίστροφα: Άρα: τα γραμμικά διανυσμ. πεδία στο $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχούν (1-1 και επί) σε μιγαδικές συναρτήσεις της μορφής $f(z) = \lambda z + \mu\bar{z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ τις οποίες γι' αυτόν τον λόγο, τις λέμε $\mathbb{R}$-γραμμικές

Συνεπώς: $\mathbb{R}$-γραμμικές μιγ. συν: $f(z) = \lambda z + \mu\bar{z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$-γραμμικές " : $f(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$

[Δηλ. $\{\mathbb{C}\text{-γραμμικές}\} \subset \{\mathbb{R}\text{-γραμμικές}\}$

Σ για τη μιγαδική διαφορισιμότητα το "$\bar{z}$-κομμάτι" είναι πολύ κακό]